

# Thermodynamique de sous-systèmes simples

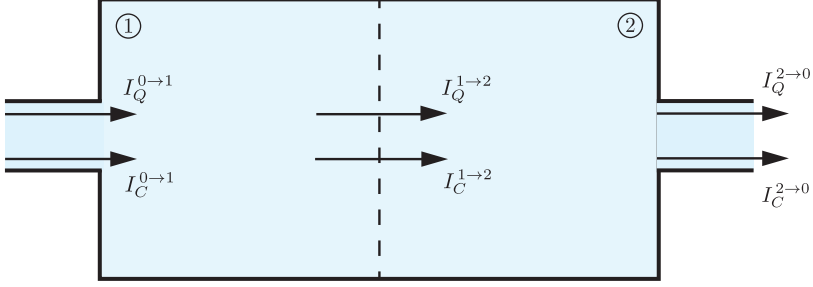
## 3.1 Thermalisation de deux sous-systèmes

☆☆☆☆ Un système isolé est constitué de deux sous-systèmes fermés 1 et 2 séparés par une paroi immobile, diatherme et imperméable. Initialement, ils sont à températures  $T_{1i}$  et  $T_{2i}$ . Le sous-système 1 contient  $N_1$  moles de gaz. L'énergie interne du gaz est donnée par  $U_1 = c_1 N_1 R T_1$ , où  $T_1$  est la température du gaz,  $R$  est une constante positive et  $c_1$  est un coefficient sans dimension. De manière similaire, il y a  $N_2$  moles de gaz dans le sous-système 2 et l'énergie interne du gaz est donnée par  $U_2 = c_2 N_2 R T_2$ .

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$  du système après thermalisation.
- 2) Déterminer la variation d'énergie interne  $\Delta U_{1i \rightarrow f}$  due à la thermalisation.
- 3) Comparer la température initiale  $T_{2i}$  du sous-système 2 et la température finale  $T_f$  du système si la taille du sous-système 2 est beaucoup plus grande que celle du sous-système 1.

## 3.5 Transfert stationnaire de matière entre deux blocs

☆☆☆☆ Un système est formé de deux blocs contenant une seule substance homogène, considérés comme des systèmes simples, séparés par une paroi fixe, diatherme et perméable (fig. 3.1). Le système est maintenu à température  $T$ . Le bloc 1 est maintenu à un potentiel chimique  $\mu_1$  et le bloc 2 à un potentiel chimique  $\mu_2$  où  $\mu_1 > \mu_2$ . Un transfert stationnaire de matière a lieu entre les blocs. On note  $I_Q^{0 \rightarrow 1}$  et  $I_C^{0 \rightarrow 1}$  le courant de chaleur et le courant énergétique de matière de l'environnement vers le bloc 1,  $I_Q^{1 \rightarrow 2}$  et  $I_C^{1 \rightarrow 2}$  le courant de chaleur et le courant énergétique de matière du bloc 1 vers le bloc 2, et  $I_Q^{2 \rightarrow 0}$  et  $I_C^{2 \rightarrow 0}$  le courant de chaleur et le courant énergétique de matière du bloc 2 vers l'environnement. On suppose que le transfert de matière entre l'environnement et chaque bloc a lieu au potentiel chimique du bloc. Durant le transfert stationnaire de matière et de chaleur :



**Fig. 3.1** Un transfert stationnaire de matière et de chaleur a lieu entre l'environnement et le bloc 1, le bloc 1 et le bloc 2, et le bloc 2 et l'environnement.

- 1) Montrer que les sommes du courant de chaleur et du courant énergétique de matière de l'environnement vers le premier bloc, du premier bloc vers le deuxième, et du deuxième bloc vers l'environnement sont égales,

$$I_Q^{0 \rightarrow 1} + I_C^{0 \rightarrow 1} = I_Q^{1 \rightarrow 2} + I_C^{1 \rightarrow 2} = I_Q^{2 \rightarrow 0} + I_C^{2 \rightarrow 0}$$

- 2) Montrer que les courants de substance de l'environnement vers le premier bloc, du premier bloc vers le deuxième et du deuxième bloc vers l'environnement sont égaux,

$$I \equiv I^{0 \rightarrow 1} = I^{1 \rightarrow 2} = I^{2 \rightarrow 0}$$

- 3) Déterminer le courant d'entropie  $I_S$  entre l'environnement et le système et la source d'entropie  $\Sigma_S$  du système.
- 4) Montrer que le courant de chaleur sortant du système est supérieur au courant de chaleur entrant,

$$I_Q^{2 \rightarrow 0} > I_Q^{0 \rightarrow 1}$$

- 5) Exprimer le courant énergétique de matière  $I_C$  de l'environnement vers le système en termes du courant de substance  $I$ , puis en termes de la source d'entropie  $\Sigma_S$ .
- 6) Justifier que le courant énergétique de matière peut être écrit de la manière suivante,

$$I_C = R_C I^2$$

et déterminer la résistance  $R_C$  au transfert de matière de la paroi entre les blocs.

### 3.6 Diffusion d'un gaz à travers une paroi perméable

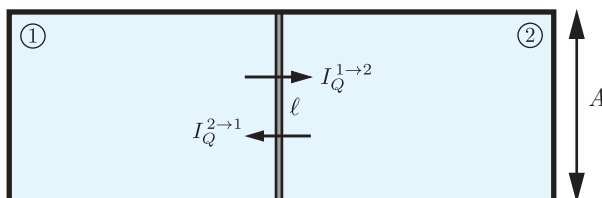
☆☆☆ On désire modéliser la diffusion d'un gaz constitué d'une seule substance à travers une paroi perméable diatherme. On considère un système isolé contenant  $N$  moles de gaz, formé de deux sous-systèmes de volumes identiques

séparés par une paroi perméable rigide. Le gaz diffuse d'un sous-système à l'autre. Il y a  $N_1(t)$  moles de gaz dans le sous-système 1 et  $N_2(t)$  moles dans le sous-système 2. On modélise les potentiels chimiques en considérant qu'ils sont proportionnels à la quantité de substance :

$$\begin{aligned}\mu_1(N_1(t)) &= \frac{\ell}{FA} \frac{N_1(t)}{2\tau} \\ \mu_2(N_2(t)) &= \frac{\ell}{FA} \frac{N_2(t)}{2\tau}\end{aligned}$$

où  $\tau > 0$  est un temps caractéristique de diffusion,  $F > 0$ , le coefficient de diffusion de Fick,  $A > 0$ , l'aire et  $\ell > 0$ , l'épaisseur de la paroi. Initialement, il y a  $N_0$  moles dans le sous-système 1, c'est-à-dire  $N_1(0) = N_0$ , et  $N - N_0$  moles dans le sous-système 2, c'est-à-dire  $N_2(0) = N - N_0$ . Déterminer l'évolution du nombre de moles  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  dans les sous-systèmes 1 et 2. En déduire le nombre de moles dans chaque sous-système à l'équilibre.

### 3.7 Thermalisation par conduction



**Fig. 3.2** Deux blocs métalliques formés du même métal sont séparés par une paroi diatherme de section  $A$  et d'épaisseur  $\ell$ . Les métaux atteignent un état d'équilibre thermique dû au transfert de chaleur par conduction à travers la paroi.

☆☆☆☆ Un système isolé est formé de deux blocs métalliques qui sont constitués de  $N_1$  et  $N_2$  moles du même métal (fig. 3.2). On modélise l'interface entre les deux blocs comme une fine paroi diatherme métallique de section  $A$ , d'épaisseur  $\ell$ , de conductivité thermique  $\kappa$  et d'énergie interne négligeable. Les énergies internes des blocs 1 et 2 sont,

$$U_1(t) = 3N_1 R T_1(t) \quad \text{et} \quad U_2(t) = 3N_2 R T_2(t)$$

où  $R$  est une constante positive. Les températures initiales des blocs sont différentes, c'est-à-dire  $T_1(0) \neq T_2(0)$ .

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$  du système lorsqu'il atteint l'équilibre thermique au temps  $t_f$ .
- 2) Établir le système d'équations différentielles qui décrit l'évolution temporelle couplée des températures  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  des deux blocs.

- 3) Dans le cas particulier où les blocs ont le même nombre de moles de constituants, c'est-à-dire  $N_1 = N_2 = N$ , montrer que la différence de température  $\Delta T(t) = T_1(t) - T_2(t)$  décroît de manière exponentielle au cours du temps lors de la thermalisation.

### 3.9 Amortissement mécanique par transfert de chaleur

★★★★ Un système isolé de volume  $V$  est constitué de deux sous-systèmes, notés 1 et 2, séparés par une paroi imperméable, diatherme et mobile, de masse  $M$ , d'aire  $A$  et de volume négligeable. Les deux sous-systèmes sont à l'équilibre thermique à température  $T$ . Ils sont constitués chacun de  $N$  moles de gaz parfait, ce qui signifie que la pression  $p_i$  du gaz dans le sous-système  $i$ , son volume  $V_i$ , le nombre de moles  $N$  et la température  $T$  sont liés par l'équation  $p_i V_i = NRT$  où  $R$  est une constante positive (sect. 5.6). La masse du gaz est négligeable par rapport à la masse de la paroi et l'énergie interne de la paroi est négligeable par rapport à celle du gaz. Initialement, le système n'est pas à l'équilibre mécanique. On considère que la variation de volume  $\Delta V$  entre le volume  $V_i$  de chaque sous-système et son volume  $V_0$  à l'équilibre mécanique est petite, c'est-à-dire  $\Delta V \ll V_0$ .

- 1) Exprimer la source d'entropie  $\Sigma_S$  en termes de la variation de pression entre les sous-systèmes  $p_1 - p_2$  et des dérivées temporelles du volume  $\dot{V}_1$  et  $\dot{V}_2$ .
- 2) Déterminer la différence de pression  $p_1 - p_2$  entre les sous-systèmes en écrivant la source d'entropie comme une forme quadratique définie positive,

$$\Sigma_S = \frac{\xi}{T} \dot{V}_1^2 \geq 0$$

- 3) Compte tenu du fait que les sous-systèmes sont constitués d'un gaz parfait, à l'aide d'un développement limité au premier ordre en  $\Delta V/V_0$ , montrer que l'équation du mouvement de la paroi est celle d'un oscillateur harmonique amorti,

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

où  $x$  est la coordonnée du déplacement de la paroi par rapport à la position d'équilibre. Déterminer l'expression du coefficient de frottement  $\gamma$  et de la pulsation  $\omega_0$  des oscillations non amorties.

- 4) En régime d'amortissement faible, c'est-à-dire  $\gamma < \omega_0$ , déterminer la période  $T$  des oscillations amorties.